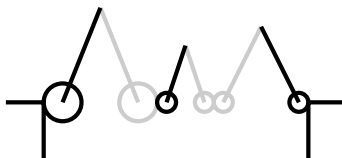


### Задача 1

**В-1**



На стене висят в ряд трое часов с маятниками. Мышка хочет перебраться по маятникам с левого шкафа на правый. Пересестись с маятника на маятник, или с маятника на шкаф можно только тогда, когда они соприкасаются. Первоначально маятники расположены как на рисунке. Первый маятник делает 3 колебания в минуту, второй — 4, третий — 4. Через сколько секунд мышка окажется на правом шкафу?

**Ответ:** 45

**Решение.** Мышка сразу забирается на первый маятник. Когда первый соприкоснётся со вторым? В такое время  $T_1$ , за которое первый маятник сделает ровно  $n$  с половиной колебаний, а второй —  $m$  колебаний ( $n, m$  — целые числа). То есть

$$3T_1 = n + 0.5, \quad 4T_1 = m, \quad \frac{n + 0.5}{3} = \frac{m}{4}, \quad 4n + 2 = 3m, \quad n = 1, m = 2, T_1 = \frac{1}{2}.$$

Теперь посмотрим, сколько времени займёт пересадка со второго маятника на третий. В момент  $T_1 = 0.5$  центральный маятник отклонён налево, а правый маятник сделает за 0.5 минут 2 колебания, то есть он будет отклонён направо.

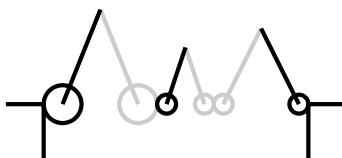
Значит, теперь надо подождать  $T_2$  секунд — пока второй маятник не сделает  $i$  с половиной колебаний, а третий —  $j$  с половиной ( $i, j$  — тоже целые).

$$4T_2 = i + 0.5, \quad 4T_2 = j + 0.5, \quad \frac{i + 0.5}{4} = \frac{j + 0.5}{4}, \quad i = 0, j = 0, T_2 = \frac{1}{8}.$$

После этого останется подождать, пока третий маятник совершит половину колебания (вернётся к шкафу) — это  $T_3 = \frac{0.5}{4} = \frac{1}{8}$ .

Всего получается  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$  минуты, то есть 45 секунд.

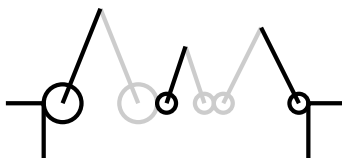
**В-2**



На стене висят в ряд трое часов с маятниками. Мышка хочет перебраться по маятникам с левого шкафа на правый. Пересестись с маятника на маятник, или с маятника на шкаф можно только тогда, когда они соприкасаются. Первоначально маятники расположены как на рисунке. Первый маятник делает 5 колебаний в минуту, второй — 2, третий — 2. Через сколько секунд мышка окажется на правом шкафу?

**Ответ:** 60

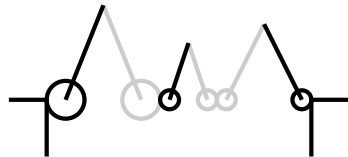
**В-3**



На стене висят в ряд трое часов с маятниками. Мышка хочет перебраться по маятникам с левого шкафа на правый. Пересесть с маятника на маятник, или с маятника на шкаф можно только тогда, когда они соприкасаются. Первоначально маятники расположены как на рисунке. Первый маятник делает 5 колебаний в минуту, второй — 4, третий — 4. Через сколько секунд мышка окажется на правом шкафу?

**Ответ:** 45

**В-4**

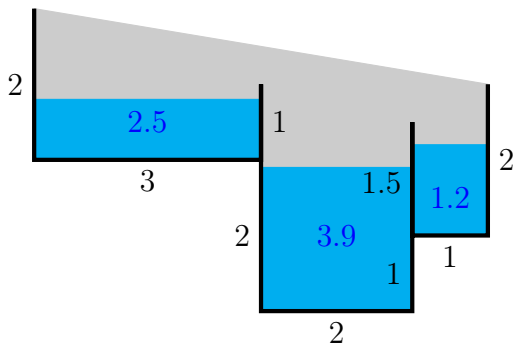


На стене висят в ряд трое часов с маятниками. Мышка хочет перебраться по маятникам с левого шкафа на правый. Пересесть с маятника на маятник, или с маятника на шкаф можно только тогда, когда они соприкасаются. Первоначально маятники расположены как на рисунке. Первый маятник делает 5 колебаний в минуту, второй — 6, третий — 6. Через сколько секунд мышка окажется на правом шкафу?

**Ответ:** 40

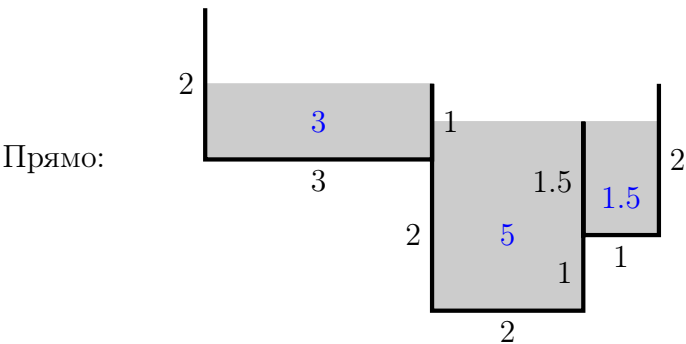
**Задача 2**

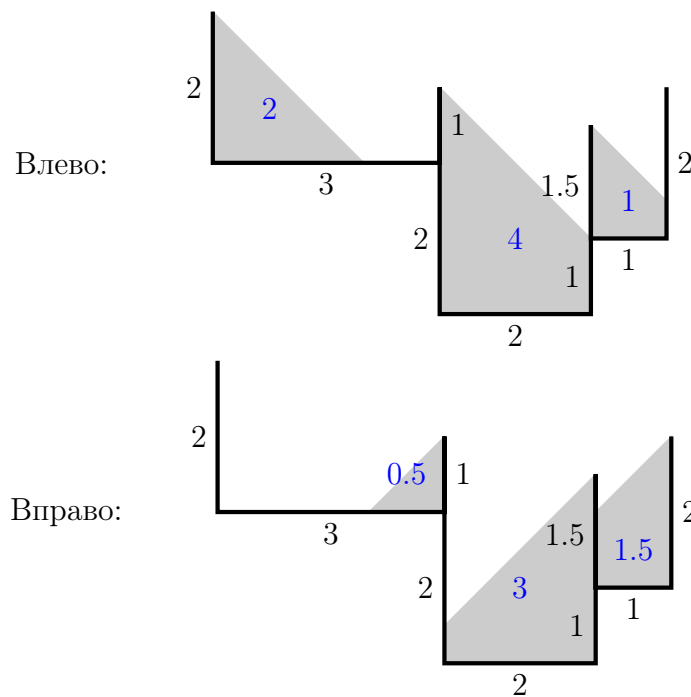
**В-1** Водонос несёт воду в ведре собственного изобретения (см. чертёж, в поперечном сечении ведро прямоугольное). С таким ведром он начал подниматься в гору — долгое время ведро медленно наклонялось влево, пока не достигло наклона в  $45^\circ$  влево, после чего наклон уменьшался, пока ведро не вернулось в изначальное положение. Потом он долгое время спускался — ведро постепенно наклонялось вправо, пока не достигло наклона  $45^\circ$  вправо, после чего наклон уменьшался, пока ведро опять не вернулось в изначальное положение. Сколько воды выльется из ведра?



**Ответ:** 2.6

**Решение.** Найдём предельные вместимости отсеков ведра под разными наклонами:





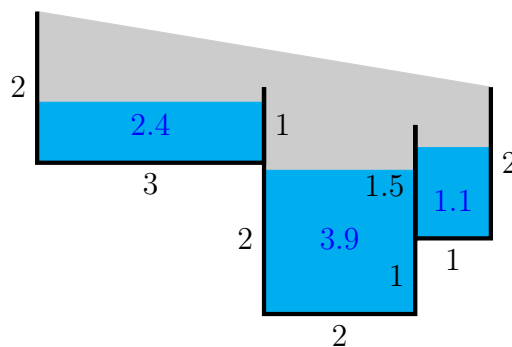
Соответственно, при наклоне влево излишки воды из третьего ведра льются во второе, излишки воды из второго льются в первое, излишки первого выльются за край. При наклоне вправо — аналогично, но в другую сторону.

Переход воды из ведра в ведро можно считать поочерёдно, «сверху вниз». Наклоняем ведро влево. В третьем ведре излишек  $1.2 - 1 = 0.2$  переходит во второе, там получается  $3.9 + 0.2 = 4.1$ , излишек  $0.1$  переходит в первое, там собирается  $2.5 + 0.1 = 2.6$ ,  $0.6$  переливается.

Переходим в изначальное положение — переполнений нет, в ведрах 2, 4, 1.

Теперь наклоняем вправо: из первого отсека во второй переходит 1.5, во втором отсеке образуется  $4 + 1.5 = 5.5$ , излишек  $2.5$  переходит в третий отсек, там скапливается  $1 + 2.5 = 3.5$ , излишек  $2$  выливается. Общие потери воды равны  $2.6$ .

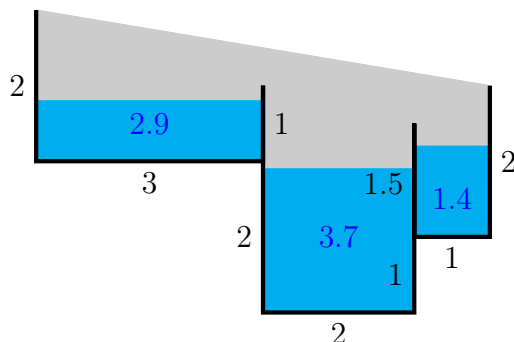
**В-2** Водонос несёт воду в ведре собственного изобретения (см. чертёж, в поперечном сечении ведро прямоугольное). С таким ведром он начал подниматься в гору — долгое время ведро медленно наклонялось влево, пока не достигло наклона в  $45^\circ$  влево, после чего наклон уменьшался, пока ведро не вернулось в изначальное положение. Потом он долгое время спускался — ведро постепенно наклонялось вправо, пока не достигло наклона  $45^\circ$  вправо, после чего наклон уменьшался, пока ведро опять не вернулось в изначальное положение. Сколько воды выльется из ведра?



**Ответ:** 2.4

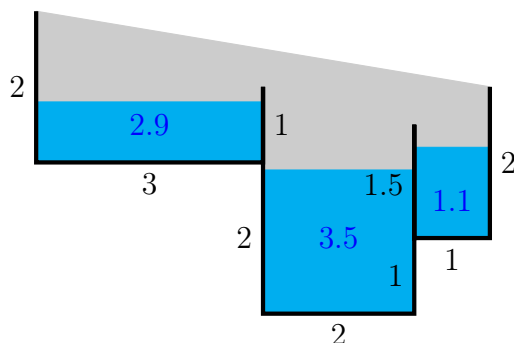
**В-3** Водонос несёт воду в ведре собственного изобретения (см. чертёж, в поперечном сечении ведро прямоугольное). С таким ведром он начал подниматься в гору — долгое время ведро медленно наклонялось влево, пока не достигло наклона в  $45^\circ$  влево, после чего наклон уменьшался, пока ведро не вернулось в изначальное положение. Потом он долгое время спускался —

ведро постепенно наклонялось вправо, пока не достигло наклона  $45^\circ$  вправо, после чего наклон уменьшался, пока ведро опять не вернулось в изначальное положение. Сколько воды выльется из ведра?



**Ответ:** 3

**В-4** Водонос несёт воду в ведре собственного изобретения (см. чертёж, в поперечном сечении ведро прямоугольное). С таким ведром он начал подниматься в гору — долгое время ведро медленно наклонялось влево, пока не достигло наклона в  $45^\circ$  влево, после чего наклон уменьшался, пока ведро не вернулось в изначальное положение. Потом он долгое время спускался — ведро постепенно наклонялось вправо, пока не достигло наклона  $45^\circ$  вправо, после чего наклон уменьшался, пока ведро опять не вернулось в изначальное положение. Сколько воды выльется из ведра?



**Ответ:** 2.5

### Задача 3

**В-1** Назовём цифру в числе *пиком*, если до неё цифры строго возрастают, а после неё — строго убывают. Назовём цифру в числе *дном*, если до неё цифры строго убывают, а после неё — строго возрастают. Назовём число *горой*, если в нём есть пик — не первая и не последняя цифра. Назовём число *ямой*, если в нём есть дно — не первая и не последняя цифра. Найдите разницу между числом ям и удвоенным числом гор.

**Ответ:** 1013

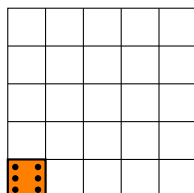
**Решение.** Первым делом заметим, что очень длинное число не может быть ни ямой, ни горой — так как в таком числе неминуемо будет много повторов цифр, а в ямах и горах каждую цифру мы можем увидеть не более двух раз.

Назовём яму хорошей, если она не начинается с девятки. Меняя каждую цифру  $k$  на цифру  $9 - k$ , мы будем менять хорошую яму на гору, а гору на хорошую яму. При этом разные числа переходят в разные. Значит, хороших ям и гор поровну. К любой хорошей яме можно слева приписать девятку, и получится плохая яма (плохая тем, что её превратить в гору не получится, так как первой цифрой станет 0, а число не может начинаться с 0), при этом разные числа переходят в разные. Значит, плохих ям не меньше, чем хороших. На самом деле их строго больше, так как есть, например, «ужасная яма» 909, которая не получается из хорошей добавлением девятки. Получилось, что ямы делятся на хорошие и плохие, причём хороших столько же, сколько гор, а плохих строго больше, чем хороших, а значит, больше, чем гор. Следовательно, число ям строго больше, чем удвоенное число гор. Их разность равна числу

«ужасных ям», которые устроены так: сначала 9, потом произвольная возрастающая последовательность хотя бы из двух цифр. Число таких последовательностей равно  $2^{10} - 10 - 1 = 1013$  (последовательность однозначно определяется подмножеством множества цифр, затем вычитаем последовательности из 1 цифры и пустую последовательность). Значит, число ям больше, чем удвоенное число гор на 1013.

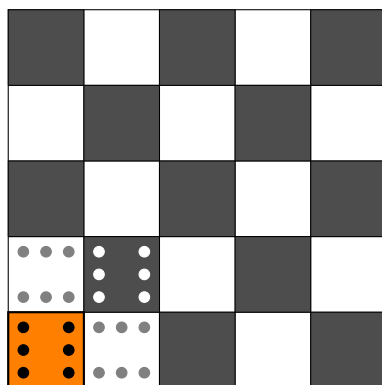
#### Задача 4

**В-1** На угловой клетке клетчатой доски  $5 \times 5$  лежит игральный кубик, грань которого по размерам совпадает с клеткой. На верхней грани кубика 6 очков. Кубик перекачивается по клеткам доски. На сколько клеток доски можно добраться такими перекачиваниями (включая исходную клетку) так, чтобы в конце пути на верхней грани кубика тоже оказалось 6 очков, и ориентация рисунка из точек была такая же?

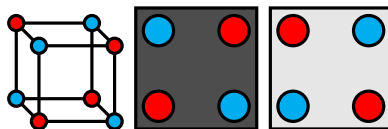


**Ответ:** 13

**Решение.** С помощью манёвра «вправо»–«вверх»–«влево» мы окажемся на клетке выше исходной с шестёркой наверху. Манёвр можно отзеркалить и повернуть, для какого-нибудь его варианта всегда есть место — то есть можно перейти на любую соседнюю клетку, сохранив 6 наверху. Только при таких шагах рисунок повернётся на  $90^\circ$ . Значит, с сохранением ориентации пока мы сможем добраться до всех «чёрных» клеток нашей доски (их 13).

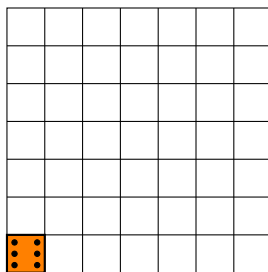


Сможем ли мы каким-либо сложным манёвром оказаться на белой клетке с вертикальной ориентацией? Нет, не сможем. Чтобы это доказать, давайте покрасим вершины кубика в красный и синий цвет вот так:



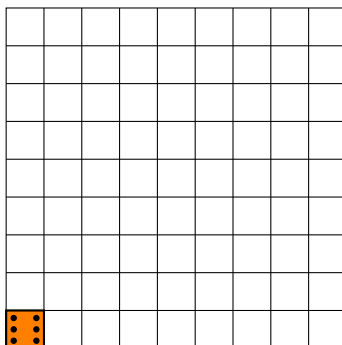
Как бы мы ни перекачивали кубик — получится так, что на чёрных и белых клетках он будет лежать в разной конфигурации цветов. При перекате на соседнюю клетку конфигурация цветов меняется. А «шестёрке» и «повёрнутой шестёрке» соответствуют разные конфигурации цветов. Поэтому ответ равен 13.

**В-2** На угловой клетке клетчатой доски  $7 \times 7$  лежит игральный кубик, грань которого по размерам совпадает с клеткой. На верхней грани кубика 6 очков. Кубик перекачивается по клеткам доски. На сколько клеток доски можно добраться такими перекачиваниями (включая исходную клетку) так, чтобы в конце пути на верхней грани кубика тоже оказалось 6 очков, и ориентация рисунка из точек была такая же?



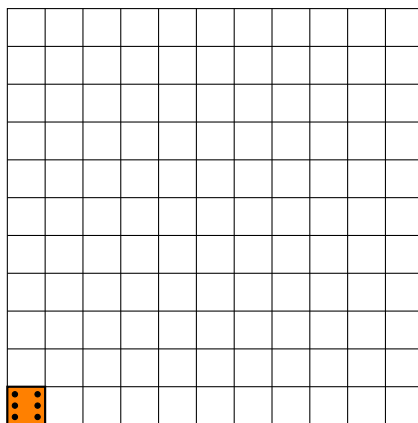
**Ответ:** 25

**В-3** На угловой клетке клетчатой доски  $9 \times 9$  лежит игральный кубик, грань которого по размерам совпадает с клеткой. На верхней грани кубика 6 очков. Кубик перекачивается по клеткам доски. На сколько клеток доски можно добраться такими перекачиваниями (включая исходную клетку) так, чтобы в конце пути на верхней грани кубика тоже оказалось 6 очков, и ориентация рисунка из точек была такая же?



**Ответ:** 41

**В-4** На угловой клетке клетчатой доски  $11 \times 11$  лежит игральный кубик, грань которого по размерам совпадает с клеткой. На верхней грани кубика 6 очков. Кубик перекачивается по клеткам доски. На сколько клеток доски можно добраться такими перекачиваниями (включая исходную клетку) так, чтобы в конце пути на верхней грани кубика тоже оказалось 6 очков, и ориентация рисунка из точек была такая же?



**Ответ:** 61

### Задача 5

**В-1** В большой коробке лежит 300 красных, 200 синих и 100 зелёных шариков. Сколькими способами можно разложить эти шарики по двум одинаковым коробкам так, чтобы в каждой из них красных шариков было не меньше, чем синих, а синих — не меньше, чем зелёных.

**Ответ:** 515151

**Решение.** Сначала решим задачу для двух различающихся коробок. Пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — количество красных, синих и, соответственно, зелёных шариков в первой коробке. Тогда должны быть выполнены условия  $a \geq b$ ,  $b \geq c$ ,  $300 - a \geq 200 - b$ ,  $200 - b \geq 100 - c$ , которые можно записать в виде  $c \leq b \leq c + 100$ ,  $b \leq a \leq b + 100$ . Ясно, что набор таких

чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  однозначно определяет подходящее распределение шариков по коробкам, и наоборот. Всего есть 101 способ выбрать число  $c$ , для любого из которых есть 101 способ выбрать число  $b$ , для любого из которых есть 101 способ выбрать число  $a$ . Значит, всего получаем  $101 \cdot 101 \cdot 101 = 1030301$  способов. Теперь, если считать коробки одинаковыми, то может случиться, что тройка  $(a; b; c)$  и тройка  $(300 - a; 200 - b; 100 - c)$  задают одно и то же распределение шариков по коробкам. Значит, все распределения будут посчитаны дважды, кроме распределения, задаваемого тройкой  $(150; 100; 50)$ . Следовательно, количество таких распределений равно  $(1030301 - 1)/2 + 1 = 515151$ .

**В-2** В большой коробке лежит 700 красных, 400 синих и 100 зелёных шариков. Сколькими способами можно разложить эти шарики по двум одинаковым коробкам так, чтобы в каждой из них красных шариков было не меньше, чем синих, а синих — не меньше, чем зелёных.

**Ответ:** 4575351

**В-3** В большой коробке лежит 500 красных, 300 синих и 100 зелёных шариков. Сколькими способами можно разложить эти шарики по двум одинаковым коробкам так, чтобы в каждой из них красных шариков было не меньше, чем синих, а синих — не меньше, чем зелёных.

**Ответ:** 2040251

**В-4** В большой коробке лежит 600 красных, 300 синих и 100 зелёных шариков. Сколькими способами можно разложить эти шарики по двум одинаковым коробкам так, чтобы в каждой из них красных шариков было не меньше, чем синих, а синих — не меньше, чем зелёных.

**Ответ:** 3055301

**В-5** В большой коробке лежит 400 красных, 300 синих и 100 зелёных шариков. Сколькими способами можно разложить эти шарики по двум одинаковым коробкам так, чтобы в каждой из них красных шариков было не меньше, чем синих, а синих — не меньше, чем зелёных.

**Ответ:** 1025201

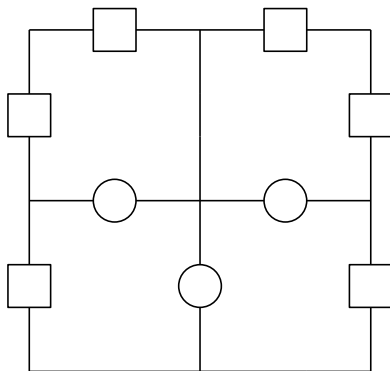
**В-6** В большой коробке лежит 500 красных, 200 синих и 100 зелёных шариков. Сколькими способами можно разложить эти шарики по двум одинаковым коробкам так, чтобы в каждой из них красных шариков было не меньше, чем синих, а синих — не меньше, чем зелёных.

**Ответ:** 1535251

### Задача 6

**В-1** На этаже есть четыре комнаты, три двери и шесть окон (см. рисунок, окна отмечены квадратами, двери — кругами). Каждую дверь и каждое окно можно оставить либо открытым, либо закрытым. Если ветер может войти в здание через одно окно и выйти через другое (путь не обязательно по прямой) — будет сквозняк. Закрытые окна и двери не дают пройти ветру.

Сколькими способами можно оставить двери и окна так, чтобы не было сквозняка?

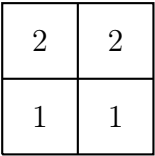


**Ответ:** 164

**Решение.** В зависимости от того, как раскрыты двери, на этаже образуется несколько изолированных друг от друга «отсеков». Внутри каждого отсека получается какое-то количество окон  $k$ , и сквозняк внутри отсека будет, если там открыто два или более окна. Следовательно, безопасных вариантов на отсек будет  $k + 1$  — один вариант «все окна закрыты» плюс  $k$  вариантов «открыто только одно из окон». Числа безопасных вариантов на каждый отсек нужно

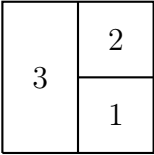
перемножить между собой. Распишем возможные случаи (на рисунках будут отсеки и число окон в них)

Двери закрыты:



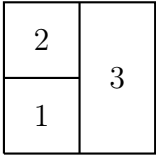
$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$

Открыта левая дверь:



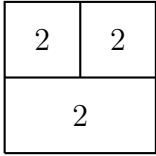
$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Открыта правая дверь:



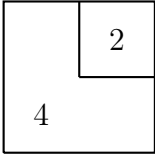
$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Открыта нижняя дверь:



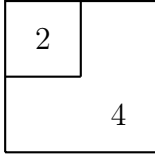
$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Открыты левая и нижняя дверь:



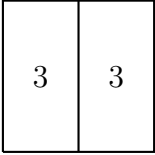
$5 \cdot 3 = 15$

Открыты правая и нижняя дверь:



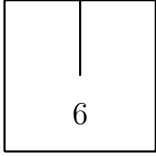
$5 \cdot 3 = 15$

Открыты правая и левая дверь:



$4 \cdot 4 = 16$

Все двери открыты:



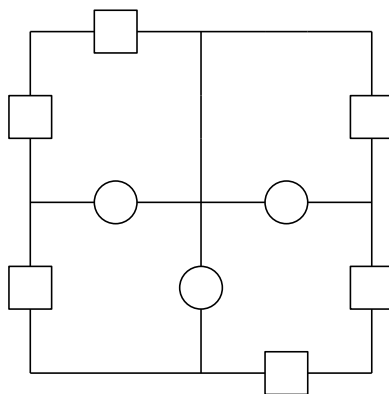
$7 = 7$

В сумме получится ответ:

$36 + 24 + 24 + 27 + 15 + 15 + 16 + 7 = 164$

**В-2** На этаже есть четыре комнаты, три двери и шесть окон (см. рисунок, окна отмечены квадратами, двери — кругами). Каждую дверь и каждое окно можно оставить либо открытым, либо закрытым. Если ветер может войти в здание через одно окно и выйти через другое (путь не обязательно по прямой) — будет сквозняк. Закрытые окна и двери не дают пройти ветру. Сколькими способами можно оставить двери и окна так, чтобы не было сквозняка?

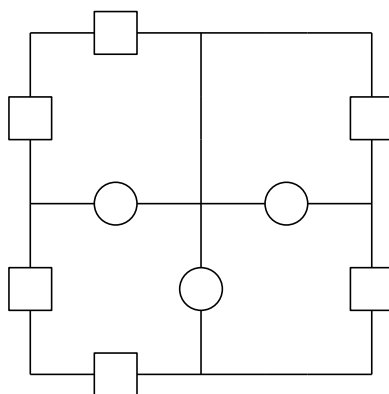




Ответ: 158

**В-3** На этаже есть четыре комнаты, три двери и шесть окон (см. рисунок, окна отмечены квадратами, двери — кругами). Каждую дверь и каждое окно можно оставить либо открытым, либо закрытым. Если ветер может войти в здание через одно окно и выйти через другое (путь не обязательно по прямой) — будет сквозняк. Закрытые окна и двери не дают пройти ветру.

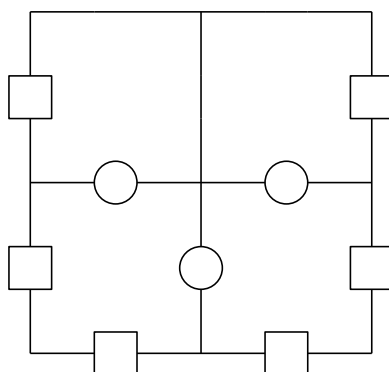
Сколькими способами можно оставить двери и окна так, чтобы не было сквозняка?



Ответ: 156

**В-4** На этаже есть четыре комнаты, три двери и шесть окон (см. рисунок, окна отмечены квадратами, двери — кругами). Каждую дверь и каждое окно можно оставить либо открытым, либо закрытым. Если ветер может войти в здание через одно окно и выйти через другое (путь не обязательно по прямой) — будет сквозняк. Закрытые окна и двери не дают пройти ветру.

Сколькими способами можно оставить двери и окна так, чтобы не было сквозняка?



Ответ: 151

### Задача 7

**В-1** Сумма слагаемых в выражении  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 97 + 99$  положительна. Андрей нашёл такое наименьшее  $N$ , при котором замена  $N$  знаков «плюс» в этом выражении на знаки «минус» приводит к отрицательной сумме. Чему может быть равна отрицательная сумма после такой замены при этом  $N$ ? Если таких значений несколько, найдите сумму возможных значений.

**Ответ:**  $-338$

**Решение.** Сумма всех нечётных чисел от 1 до 99 равна

$$\frac{1+99}{2} \cdot 50 = 2500.$$

Нам нужно так изменить знаки, чтобы было:  $A + B = 2500, A - B < 0$  (здесь  $A$  – сумма всех слагаемых с плюсом,  $B$  – сумма модулей всех слагаемых с минусом). Значит,  $A \in [1, 1249]$ ,  $B = 2500 - A \in [1251, 2499]$ .

Если мы хотим минимизировать количество замен знаков, чтобы число стало отрицательным, нам нужно заменить знаки, соответствующие наибольшим по модулю значениям. Это приведёт к неравенству:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) - (2n + 1) - (2n + 3) - \dots - 97 - 99 < 0.$$

Иными словами,  $A = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) \leq 1249$ . Отсюда  $n^2 \leq 1249, n \leq 35$ . Это означает, что количество чисел с «минусом» не меньше 15, и минимальное значение есть  $N = 15$ .

Тогда получается  $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 69 = 1225, A - B = -50$ .

Но при  $N = 15$  возможны и другие значения отрицательной суммы. Нас интересуют все возможные суммы 15 различных нечётных чисел от 1 до 99, превышающие 1250. Любая сумма 15 нечётных чисел нечётна. Минимальная такая сумма равна сумме 15 наименьших нечётных  $1 + 3 + 5 + \dots + 29 = 15^2 = 225$ , максимальная —  $99 + 97 + \dots + 71 = \frac{99+71}{2} \cdot 15 = 1275$ . Таким образом,  $B$  может принимать все нечётные значения между 225 и 1275. В промежутке  $[1251, 1275]$  находятся

$$B \in \{1251, 1253, 1255, \dots, 1275\}.$$

Тогда  $A = 2500 - B, A - B = 2500 - 2B$ , то есть

$$A - B \in \{-2, -6, -10, -14, -18, -22, -26, -30, -34, -38, -42, -46, -50\}.$$

Получается 13 разных значений с суммой  $\frac{-2-50}{2} \cdot 13 = -338$ .

---

**В-2** Сумма слагаемых в выражении  $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 98 + 100$  положительна. Борис нашёл такое наименьшее  $N$ , при котором замена  $N$  знаков «плюс» в этом выражении на знаки «минус» приводит к отрицательной сумме. Чему может быть равна отрицательная сумма после такой замены при этом  $N$ ? Если таких значений несколько, найдите сумму возможных значений.

**Ответ:**  $-128$

---

**В-3** Сумма слагаемых в выражении  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 + 101$  положительна. Валентина нашла такое наименьшее  $N$ , при котором замена  $N$  знаков «плюс» в этом выражении на знаки «минус» приводит к отрицательной сумме. Чему может быть равна отрицательная сумма после такой замены при этом  $N$ ? Если таких значений несколько, найдите сумму возможных значений.

**Ответ:**  $-15$

---

**В-4** Сумма слагаемых в выражении  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 103 + 105$  положительна. Галина нашла такое наименьшее  $N$ , при котором замена  $N$  знаков «плюс» в этом выражении на знаки «минус» приводит к отрицательной сумме. Чему может быть равна отрицательная сумма после такой замены при этом  $N$ ? Если таких значений несколько, найдите сумму возможных значений.

**Ответ:**  $-666$

---